Mathematik Sekundarstufe II

Dokumentation von Lösungen mit und ohne GTR

Der Einsatz des GTR ersetzt die Dokumentation von Rechenschritten. Ein Aspekt der Prüfung ist der effiziente Einsatz des GTR, um Zeit zu sparen. Gelingt dieser Einsatz nicht, wird die Zeit nicht reichen, den Prüfungsumfang zu bewältigen.

Aufgrund des Zeitproblems ist es absolut unerlässlich, die Operatoren genau zu verstehen.

Wir verwenden 5 Arten von Operatoren auf die beschriebene Weise.

1. **„Angeben“**
   Gib die Lösung der Aufgabe an.
2. **„Bestimmen“**
   Wähle den schnellsten Weg mit dem GTR und dokumentiere ihn, *ohne auf Tastenkombinationen zu verweisen*.
3. **„Bestimmen“ mit Zusatz**, z. B. „graphisch“ oder „durch Ablesen“
   Wähle einen Weg, der zum Zusatz passt, und dokumentiere ihn.
4. **„Berechnen“**, „Rechnerisch Ermitteln“
   Beachte den Dreischritt:
   a. Ansatz
   b. Zwischenergebnis/Lösung
   c. Einordnung/Interpretation
5. **„Berechnen“ mit Zusatz**, z. B. „Lösung auch ohne GTR nachvollziehbar“
   Löse wie in 4. und beachte den Zusatz.

Im Folgenden sollen die Unterschiede der Dokumentation mit und ohne GTR anhand von Beispielen aus den drei Themenfeldern Analysis, analytische Geometrie und Stochastik verdeutlicht werden.

Berechnung von Extrema

Betrachtet wird die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{x^3}{15} - \frac{7x^2}{20} - \frac{3x}{2} + 4$.
Berechnen Sie die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt.

<u>Schülerlösung</u>

$$\mathbf{f'(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{10}x - \frac{3}{2}}$$

$$\mathbf{f''(x) = \frac{2}{5}x - \frac{7}{10}}$$

Beachte:
Rechnerische Bestimmung von Extremstellen (analog von Wendestellen)

- **Angabe des Ableitungsterms**
- **Bestimmung von möglichen Extremstellen mithilfe einer notwendigen Bedingung**
- **Bestätigung der Extremstellen mithilfe einer hinreichenden Bedingung**

Notw. Bed.: f'(x) = 0

(Lösung ohne GTR)

$\frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{10}x - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{15}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} + \frac{15}{2}} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} + \frac{120}{16}} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{7}{4} \pm \frac{13}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{20}{4} = 5 \lor x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

(Lösung mit GTR)

$\frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{10}x - \frac{3}{2} = 0$

Lösen der Gleichung mit dem GTR liefert

$x = 5 \lor x = -\frac{3}{2}$

An den Stellen x = - 1,5 und x = 5 liegen möglicherweise Extrema vor / waagerechte Tangenten vor.

Hinr. Bed.: f'(x) = 0 ∧ f''(x) ≠ 0

$f''(-1{,}5) = -1{,}3 < 0 \quad \Rightarrow$ Hochpunkt

$f''(5) = 1{,}3 > 0 \quad \Rightarrow$ Tiefpunkt

Funktionswerte

$f(-1{,}5) \approx 5{,}24 \qquad H(-1{,}5|5{,}24).$

$f(5) \approx -3{,}92 \qquad T(5|-3{,}92)$

Integralrechnung

Gegeben seien die Funktionen f und g mit den Gleichungen $f(x) = x^3 - x$ und $g(x) = -x^3 + x^2$.
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts, den die Graphen von f und g einschließen.

Beachte:
Bei der Berechnung bestimmter Integrale sind *auch ohne Zusatz* folgende Angaben erforderlich:
- **Angabe des Terms einer Stammfunktion**
- **Anwendung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung**

<u>Schülerlösung</u>

Differenzfunktion

$d(x) = f(x) – g(x) = x^3 – x – (- x^3 + x^2) = 2\,x^3 – x^2 – x$

Stammfunktion

$\boldsymbol{D(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2}$

Integrationsgrenzen

(Lösung ohne GTR)

$$
\begin{aligned}
& d(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\,x^3 - x^2 - x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x\,(2x^2 - x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \lor x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \lor x = \tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \lor x = \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{3}{4} \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \lor x = 1 \lor x = -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(Lösung mit GTR)

$$
\begin{aligned}
& d(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\,x^3 - x^2 - x = 0
\end{aligned}
$$

GTR:

$x = 0 \lor x = 1 \lor x = -\frac{1}{2}$

Die Graphen von f und g schließen zwei Flächenstücke ein.

Flächenberechnung:

$\int_{-0,5}^{0} d(x)dx = \boldsymbol{D(0) - D(-0,5)} = \frac{5}{96}$ *und* $\int_{0}^{1} d(x)dx = \boldsymbol{D(1) - D(0)} = -\frac{1}{3}$.

Also schließen die Graphen von f und g eine Fläche mit dem Inhalt $A = \frac{5}{96} + \frac{1}{3} = \frac{37}{96}$ ein.

Geometrie: Lagebeziehung Gerade - Ebene

Gegeben seien eine Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und

eine Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden und der Ebenen zueinander.

Bestimmen Sie ggf. ihren Schnittpunkt und ihren Schnittwinkel.

<u>Schülerlösung</u>

$E \cap g$:

$$\begin{array}{cccc} r & s & t & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad \text{GTR liefert} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad r = \frac{2}{3} \quad \wedge \quad s = \frac{11}{3} \quad \wedge \quad t = \frac{2}{3}$

Das LGS besitzt eine eindeutige Lösung.

Also schneiden sich g und E in einem Punkt.

$t = \frac{2}{3}$ in g einsetzen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{16}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{11}{3}\end{pmatrix}$$

g und E schneiden sich im Punkt $S(\frac{16}{3} / \frac{2}{3} / \frac{11}{3})$.

Schnittwinkel :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\sin\alpha = \frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 19{,}5°$$

Der Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene beträgt ca. 19,5°.

Stochastik

Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für höchstens eine defekte Glühbirne bei einem Stichprobenumfang von 100 und einer Trefferwahrscheinlichkeit von 5 %.

<u>Schülerlösung</u>

geg.: X = Anzahl der defekten Glühbirnen, p = 0,05 und n = 100

ges.: $P(X \leq 1)$

mit GTR:	ohne GTR:
Mit BinomialCD (1, 100, 0.05) ergibt sich $P(X \leq 1) \approx 0{,}0371$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 3,71 % gibt es höchstens eine defekte unter den 100 Glühbirnen.	Stellen Sie einen Term zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit auf und vereinfachen Sie ihn so weit wie möglich. $P(X \leq 1) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1)$ $= \binom{100}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^{99}$ $= 0{,}95^{100} + 100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^{99}$